

261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé.

I - Loi d'une variable aléatoire

1. Définitions

a. Préliminaires théoriques

Définition 1. Soient (E, \mathcal{F}) un espace probablisable. On appelle **variable aléatoire** toute fonction $X : \Omega \rightarrow E$ mesurable. On appelle **loi** de X la mesure image de \mathbb{P} par X , définie par

[GOU21]
p. 334

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{ll} \mathcal{F} & \rightarrow [0, 1] \\ F & \rightarrow \mathbb{P}(X^{-1}(F)) \end{array}$$

Notation 2. Pour alléger les notations, on écrira $\{X \in F\}$ pour désigner l'ensemble $X^{-1}(F)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X^{-1}(F))$ devient $\mathbb{P}(X \in F)$. De même, $\{X = x\}$ désigne l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$, $\{X \leq a\}$ désigne l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, a])$ (dans le cas réel), etc.

Exemple 3. On se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_1$ et on considère la fonction réelle $X : \omega \mapsto \omega$. Alors, X est une variable aléatoire, dont la loi est $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}$.

[G-K]
p. 118

Définition 4. Une variable aléatoire X est dite **réelle** si son espace d'arrivée est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

[GOU21]
p. 334

b. Loïs discrètes

Définition 5. — On dit qu'une loi μ est **discrète** s'il existe un ensemble D fini tel que $\mu(D) = 1$.

[G-K]
p. 335

— On dit que la variable aléatoire X est discrète si sa loi \mathbb{P}_X est discrète.

Remarque 6. Cela revient à dire que $X(\Omega)$ est fini ou est dénombrable.

[GOU21]
p. 335

Exemple 7. On pose $\Omega = \{(\omega_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \omega_n \in \{0, 1\} \forall n \in \mathbb{N}\}$ et $X : (\omega_n) \mapsto \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_n = 0\}$. Alors X est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

[G-K]
p. 131

Proposition 8. Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble dénombrable D , alors :

$$(i) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X(A) = \sum_{i \in D \cap A} \mathbb{P}(X = i).$$

$$(ii) \quad \mathbb{P}_X = \sum_{i \in D} \mathbb{P}(X = i) \delta_i \text{ où les } \delta_i \text{ sont des masses de Dirac (voir Exemple 9 Exemple 9).}$$

Exemple 9. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Voici quelques exemples de lois discrètes classiques.

— Si $x \in \Omega$, on pose $\delta_x : A \mapsto \mathbb{1}_A(x)$. C'est une loi discrète sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

— Soit $E \subseteq \Omega$ fini. On appelle loi uniforme sur E la loi discrète définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\rightarrow \frac{|A \cap E|}{|E|} \end{aligned}$$

— X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(p)$, si $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Dans ce cas, X est bien une loi discrète et on a

$$\mathbb{P}_X = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$$

— X suit une loi de binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si X est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètre p . Dans ce cas, X est bien une loi discrète et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

— X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$, notée $\mathcal{G}(p)$, si l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

— X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

c. Lois à densité

Définition 10. On dit qu'une loi réelle μ est **à densité** s'il existe une fonction mesurable f telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(A) = \int_A f d\lambda$$

Proposition 11. Soit X une variable aléatoire de densité f .

(i) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \int_{[a,b]} f \, d\lambda\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(a \leq X) = \mathbb{P}(a < X) = \int_{[a, +\infty[} f \, d\lambda = \int_{]a, +\infty[} f \, d\lambda$$

et

$$\mathbb{P}(a \geq X) = \mathbb{P}(a > X) = \int_{]-\infty, a]} f \, d\lambda = \int_{]-\infty, a[} f \, d\lambda$$

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 1$$

Exemple 12. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Voici quelques exemples de lois à densité classiques.

p. 141

— X suit une loi uniforme sur un compact K de \mathbb{R} si elle admet la densité

$$x \mapsto \frac{1}{\lambda(K)} \mathbb{1}_K(x)$$

— X suit une loi gaussienne de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle admet la densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

— X suit une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, notée $\mathcal{E}(a)$ si elle admet la densité

$$x \mapsto a e^{-ax} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

— X suit une loi Gamma de paramètres $a, \gamma > 0$, notée $\Gamma(a, \gamma)$ si elle admet la densité

$$x \mapsto \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

où $\Gamma(a)$ est la valeur au point a de la fonction Γ d'Euler.

p. 179

Théorème 13. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g . Alors, $X + Y$ admet comme densité la fonction $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$.

2. Espérance

Définition 14. — On note $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ou simplement $\mathcal{L}_1(\Omega)$ voire \mathcal{L}_1 s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'espace des variables aléatoires intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

— Si $X \in \mathcal{L}_1$, on peut définir son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

p. 159

Théorème 15 (Transfert). Si X est une variable aléatoire dont la loi \mathbb{P}_X admet une densité f par rapport à \mathbb{P} et si g est une fonction mesurable, alors

$$g(X) \in \mathcal{L}_1 \iff \int_{\mathbb{R}} |g(x)|f(x) d\mathbb{P}(x) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) d\mathbb{P}(x)$$

p. 164

Corollaire 16. Soit g une fonction mesurable. Si X est une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = D$, alors

$$g(X) \in \mathcal{L}_1 \iff \sum_{i \in D} |g(i)|\mathbb{P}(X = i) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i \in D} g(i)\mathbb{P}(X = i)$$

Remarque 17. En reprenant les notations précédentes, et avec $g : x \mapsto x$, on a

$$X \in \mathcal{L}_1 \iff \sum_{i \in D} |i|\mathbb{P}(X = i) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in D} i\mathbb{P}(X = i)$$

Corollaire 18. Soit g une fonction mesurable. Si X est une variable aléatoire admettant f comme densité, alors

$$g(X) \in \mathcal{L}_1 \iff \int_{\mathbb{R}} |g|f d\lambda < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g|f d\lambda$$

Remarque 19. En reprenant les notations précédentes, et avec $g : x \mapsto x$, on a

$$X \in \mathcal{L}_1 \iff \int_{\mathbb{R}} |x|f(x) dx < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} |x|f(x) dx$$

Exemple 20. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

- $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
- $X \sim \mathcal{B}(n, p) \implies \mathbb{E}(X) = np$.
- $X \sim \mathcal{G}(p) \implies \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \implies \mathbb{E}(X) = \lambda$.

p. 187

3. Indépendance

Définition 21. Soient (E, \mathcal{F}) un espace probabilisable. On dit que deux variables aléatoires $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow E$ sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent sont indépendantes ie.

p. 126

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X \in B\}) = \mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_X(B)$$

Proposition 22. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes pour toutes fonctions mesurables f et g .

Théorème 23. Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors, X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

Corollaire 24. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors, $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$.

Proposition 25. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

II - Caractérisation de la loi par des fonctions

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$.

1. Fonctions de répartition

Définition 26. On appelle **fonction de répartition** de X , notée F_X la fonction définie sur \mathbb{R}^d par

$$\forall (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d, F_X(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d)$$

où l'on a noté $X = (X_1, \dots, X_d)$.

p. 118

Exemple 27. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

p. 143

Théorème 28. Si deux variables (ou vecteurs) aléatoires ont la même fonction de répartition, alors elles ont même loi.

p. 118

Théorème 29. (i) F_X est à valeurs dans $[0, 1]$.

(ii) F_X est croissante sur \mathbb{R} .

(iii) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.

(iv) En tout point x de \mathbb{R} , F_X est continue à droite et admet une limite à gauche, qui vaut $F_X(x)$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

(v) L'ensemble des points de discontinuité de F est fini ou dénombrable.

Théorème 30. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, continue à droite et telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$. Alors, il existe une mesure de probabilité sur \mathbb{R} dont F est la fonction de répartition.

2. Fonctions caractéristiques

Définition 31. On appelle **fonction caractéristique** de X la fonction ϕ_X définie sur \mathbb{R}^d par

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle})$$

p. 239

[AMR08]
p. 156

Exemple 32. Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = e^{-\frac{(xt)^2}{2}}$$

Théorème 33. Si deux variables (ou vecteurs) aléatoires ont la même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

[G-K]
p. 239

Théorème 34. (i) $\phi_X(0) = 1$.

(ii) $|\phi_X| \leq 1$.

(iii) ϕ est uniformément continue sur \mathbb{R}^d .

Proposition 35. Si deux variables aléatoires réelles sont indépendantes, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

Théorème 36. Si X admet un moment d'ordre N (ie. $\mathbb{E}(\|X\|^N) < +\infty$), alors ϕ_X est \mathcal{C}^N et, si $d = 1$,

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$$

Exemple 37. Si X admet un moment d'ordre 2 et est centrée avec une variance σ^2 , on a alors

$$\phi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$$

quand t tend vers 0.

3. Fonctions génératrices

On suppose dans cette sous-section que X est à valeurs dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Définition 38. On appelle **fonction génératrice** de X la fonction

p. 235

$$G_X: \begin{array}{ll} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k \end{array}$$

Remarque 39.

p. 246

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = G_X(e^{it})$$

Exemple 40. — $X \sim \mathcal{B}(p) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = (1-p) + ps$.

p. 236

— $X \sim \mathcal{B}(n, p) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = ((1-p) + ps)^n$.

- $X \sim \mathcal{G}(p) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$.
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = e^{-\lambda(1-s)}$.

Théorème 41. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et \mathcal{L}_1 . Alors,

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$$

Corollaire 42. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans \mathbb{N} . Alors,

$$G_{X_1 X_2} = G_{X_1} + G_{X_2}$$

Théorème 43. Sur $[0, 1]$, la fonction G_X est infiniment dérivable et ses dérivées sont toutes positives, avec

$$G_X^{(n)}(s) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-n+1)s^{X-n})$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

ce qui montre que la fonction génératrice caractérise la loi.

Exemple 44. Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(m, p)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

[GOU21]
p. 346

Théorème 45. $X \in \mathcal{L}_1$ si et seulement si G_X admet une dérivée à gauche en 1. Dans ce cas, $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$.

[G-K]
p. 238

III - Convergence en loi

Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

1. Définition et premières propriétés

Définition 46. On dit que (X_n) **converge en loi** vers $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(X))$$

On note cela $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

p. 295

p. 313

Exemple 47. Si $\forall n \geq 1$, X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Proposition 48. Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(d)} Y$, alors :

(i) La limite X est unique.

(ii) $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, Y \rangle$.

Plus généralement, si $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n et X sont à valeurs dans E , alors $f(X_n) \xrightarrow{(d)} f(X)$ pour toute f fonction définie et continue sur E .

p. 295

Théorème 49 (Lemme de Scheffé). On suppose :

— $X_n \xrightarrow{(ps.)} X$.

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_n \, d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P}$.

Alors, $X_n \xrightarrow{(L_1)} X$.

Corollaire 50. On suppose :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n admet une densité f_n .

— (f_n) converge presque partout vers une fonction f .

— Il existe une variable aléatoire X admettant f pour densité.

Alors, $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

Corollaire 51. Si X et X_n sont des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable D pour tout $n \in \mathbb{N}$, en supposant

$$\forall k \in D, \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

alors $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

Application 52. Soit, pour $n \geq 1$, une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p_n . On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n p_n = \lambda > 0$. Alors,

$$X_n \xrightarrow{(d)} X$$

où X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

p. 302

Théorème 53. En notant F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , on a,

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(x)$$

en tout point x où F_X est continue.

Théorème 54. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire.

- (i) Si (X_n) converge en probabilité vers X , alors (X_n) converge en loi vers X .
- (ii) Si (X_n) converge en loi vers une constante a (ou de manière équivalente, vers une masse de Dirac δ_a), alors (X_n) converge en probabilité vers a .

Contre-exemple 55. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$, alors (X_n) converge en loi vers $\mathcal{B}(2p(1-p))$, mais pas en probabilité.

[HAU]
p. 362

2. Théorème central limite et applications

Théorème 56 (Slutsky). Si $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et $Y_n \xrightarrow{(d)} c$ où c est un vecteur constant, alors :

- (i) $X_n + Y_n \xrightarrow{(d)} X + c$.
- (ii) $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{(d)} \langle X, c \rangle$.

[G-K]
p. 305

Théorème 57 (Lévy). On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

[Z-Q]
p. 544

Théorème 58 (Central limite). On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$. Alors,

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

[G-K]
p. 307

Application 59 (Théorème de Moivre-Laplace). On suppose que (X_n) est une suite de

[DEV]

variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Lemme 60. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$.

p. 180

[DEV]

Application 61 (Formule de Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

p. 556

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Les Contre-Exemples en Mathématiques

[HAU]

Bertrand HAUCHECORNE. *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. 2^e éd. Ellipses, 13 juin 2007.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.